

O Conceito Da Mediana Na Perspectiva Dos Estudantes Principiantes

Emílio António, Delson Alexandre Alberto Z. Mugabe

Resumo: Com este trabalho pretendia-se analisar os erros e as dificuldades apresentados pelos Estudantes do Curso de Estatística e Gestão de Informação (EGI) da Universidade Pedagógica Delegação de Nampula no cálculo da mediana, olhando pelas suas respostas e reflectir sobre a natureza dos processos mentais que estão na base dos seus pensamentos. O estudo é de natureza qualitativa e foi desenvolvido com 25 estudantes do 1º Ano do curso. A análise foi baseada nas respostas dos alunos a um questionário e as estratégias foram comparadas com as encontradas em pesquisas prévias sobre a mesma temática. Apresentamos estratégias de solução originais do aluno, e em função disso, fizemos uma análise qualitativa para caracterizar os erros, preconceções concernentes a mediana.

Palavras-chave: Dificuldades, mediana, Estudantes, 1º Ano

1. CONTEXTUALIZAÇÃO

Actualmente, dada a uma grande quantidade de informação com que lidamos e a sua necessidade de tratamento e análise para tomada de decisões esclarecidas, realça a importância que a estatística vem tendo nos nossos dias. De facto, a análise dos problemas que cercam o quotidiano mostram que cada vez mais se envolvem conceitos e procedimentos estatísticos tais como gráficos, tabelas, médias, que subsidiaram a decisões das pessoas [4]. Assim, perante a importância crescente do pensamento estatístico e probabilístico na sociedade, coloca-se a qualquer cidadão o desafio de gerir e utilizar a informação que lhe chega, para tomar as suas decisões conscientemente. Portanto, torna-se imprescindível que o cidadão adquira competência para atingir esse fim. Nessa perspectiva, reconhecendo a importância do estudo da estatística na melhoria das capacidades de intervenção do aluno como cidadão, dotando-o de ferramentas apropriadas para avaliar afirmações de carácter estatístico, muitos países incluem o estudo de conceitos e procedimentos da estatística básica nos seus currículos de educação elementar. Actualmente, as propostas curriculares de Matemática em todo mundo dedicam atenção a esse tema, enfatizando o estudo do mesmo ser importante para que as pessoas adquiram capacidades de análise de diferentes problemas tais como o custo de vida, desemprego, inflação, tirando conclusões de várias situações do quotidiano [3]. Apesar de hoje já existir alguma investigação nesse âmbito, muito ainda está por se fazer, e as investigações feitas sobre estas dificuldades e erros a nível nacional, não são suficientemente conhecidas pelos professores [10] página 167. Batanero [2] e Fernandes [10] são unânimes ao afirmar que o número de investigações acerca do ensino da estatística é escasso e só agora se começa a ter algum conhecimento das dificuldades e estratégias de raciocínios dos alunos em relação aos conceitos mais importantes. Nesta ordem de ideia manifesta-se de grande importância a realização desse estudo para que os professores tenham a consciência dos erros e concepções dos alunos sobre a mediana. Acreditamos que se os professores nas suas aulas tomarem em consideração os erros e as dificuldades dos alunos no conceito de estatística, poderão mudar a sua prática perante o mesmo. Se queremos formar cidadãos competentes na interpretação da informação estatística que se encontra na vida profissional e quotidiana, seria

importante que o ensino de estatística tivesse em conta as possíveis dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos estatísticos. Carvalho [4] na página 89, citando Batanero & Godino de 1994, diz que falar sobre os erros e as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos estatísticos é tão urgente porque muitos deles poderiam ser evitados se fossem seguidas as indicações didácticas adequadas. Portanto os erros e as dificuldades mais frequentes e persistentes dos alunos contribuem para a compreensão do processo de aprendizagem e na melhoria do desempenho do professor. Actualmente, o estudo dos erros dos alunos é visto pelos investigadores como meio para perceber as formas de pensamento dos alunos, e permitir a mudança da prática docente, passando o erro a ser concebido como uma concepção alternativa e cada vez menos como insuficiência dos alunos ou algo indesejável e a penalizar [4]. Assim, este trabalho analisa erros e dificuldades que os estudantes principiantes do 1º ano, curso de Estatística da Universidade Pedagógica – Nampula, apresentam, no cálculo da mediana, analisando as suas respostas e reflectir sobre a natureza dos processos mentais que estão na base dos seus pensamentos.

2. DIFICULDADES DOS ALUNOS NO CONCEITO DE MEDIANA DE ACORDO COM OUTROS AUTORES

As investigações prévias indicam que a definição da mediana não é clara para os alunos. Barr [1] realizou um estudo com alunos de entre 17 e 21 anos concluindo que estes estudantes interpretam a mediana como centro de “algo”, mas não compreendem o que se refere a este “algo”. Também em um estudo de McGatha, Cobb, e McClain [12] constatou que os estudantes calculam a média ao pedir-lhes para encontrar uma medida de tendência central sem terem em conta o contexto. Alguns estudantes não percebem que a mediana pode ser melhor representante de um conjunto de dados que a média em algumas circunstâncias [13]. Groth e Bergnen [11] salientam que alguns estudantes são capazes de calcular a mediana quando os dados estão listados, porém apresentam dificuldades para calcular a partir de uma tabela de frequência. Carvalho [7] num dos seus estudos, também constatou que os alunos não tiveram em conta a frequência absoluta de cada valor no cálculo da mediana, quando os dados se apresentavam sob forma de tabela, ou

não ordenam os dados previamente à sua localização. Partindo de uma tabela de frequência, Barr [1] constatou que o erro mais frequente consistiu em determinar a mediana das frequências ordenadas, seguindo-se a determinação da mediana dos valores que toma a variável sem atender à sua frequência. Este mesmo erro foi encontrado por Carvalho [6], ao analisar o cálculo da mediana em alunos de 13-14 anos. Outros erros dos cometidos pelos alunos ainda no mesmo estudo, foram os seguinte: a) Não ordenar os dados ao calcular a mediana, entendendo que a mediana centro da lista de dados não ordenados e b) Calcular o valor da moda em vez da mediana. Entre as três medidas de localização, a mediana revela-se a mais difícil. A evidência relativa à maior dificuldade na compreensão do conceito de mediana foi também constatada por Carvalho e César [5], analisando o desempenho de alunos do 7º ano na selecção da média e a mediana. Nessa análise, contactou que a grande maioria aplicou, com sucesso, os procedimentos de cálculo da média e da mediana, porém, detectaram a existência de erros conceptuais e dificuldades de aplicação prática dos conhecimentos sobre medidas de tendência central, por exemplo no tratamento dos valores atípicos para escolha da medida que melhor representa uma distribuição. Outros erros muito frequentes nos alunos é a determinação de uma distribuição sendo dada a média, mediana e moda. Cobo e Batanero [9] e Batanero et al. [3], Justificam as dificuldades dos alunos no cálculo da mediana, como o facto de o algoritmo para o cálculo da mediana não seja único, já que depende do tipo de dados, da sua apresentação e inclusivamente do seu número, mas também devido ao ensino das medidas de tendência central ter estado a se centrar, habitualmente, na apresentação de fórmulas - o que não permite que os alunos compreendam o significado integral dos conceitos, tornando o estudo da mediana muito complexo. Quando analisamos a literatura acerca dos erros e das dificuldades dos alunos ficamos com a ideia que a maioria dos investigadores procurou identificar uma realidade — como os alunos resolvem as situações estatísticas particulares, muitas delas traduzindo preocupações curriculares -mais do que reflectir sobre como esse conhecimento é construído. Assim, Batanero [2] propõe-nos, com base numa análise das dificuldades dos alunos acerca das medidas de tendência central, percorrer o caminho da construção do seu significado. Para esta autora, compreender uma dificuldade manifestada pelos alunos durante a aprendizagem dum determinado conceito liga-se à construção do próprio conhecimento e, consequentemente analisar as dificuldades dos alunos não se deve limitar a uma descrição das mesmas, sendo necessário compreender o que poderá estar por detrás do seu aparecimento.

3. DESCRIÇÃO DA INVESTIGAÇÃO

O estudo envolveu 25 alunos de uma turma do 1º ano, curso de estatística da Universidade Pedagógica-Nampula, em que foram submetidos a um questionário constituído por 5 questões estabelecidas por referência de estudos sobre a mediana. O cálculo e o significado da mediana foram os aspectos focados nas cinco questões, como veremos a seguir: 1) Cálculo da mediana dos pesos em quilogramas de 9 e 10 crianças; 2) Determinação da

melhor medida que representa um conjunto de dados quando são incorporados os valores extremos; 3) Determinação se possível da mediana para dados qualitativos nominais apresentados num gráfico de frequência; 4) Localização da mediana no gráfico de frequências das alturas de 52 alunos e 5) Estudar a variação da mediana (diminui, aumenta ou mantém-se) com a introdução de um novo dado num contexto genérico. Os alunos responderem o questionário em casa, daí julgarmos que tiveram o tempo suficiente para resolverem as perguntas. De referir que dos 25 estudantes apenas 15 devolveram os questionário. Finalmente, em termos de análise de dados, estudaram-se as respostas e raciocínios dos alunos nas diferentes perguntas, codificando as respostas correctas, erradas e não resposta. Em cada pergunta determinaram-se as percentagens das respostas correctas e erradas.

3.1. Análise das respostas dos Alunos

Nesta abordagem apresentam-se as dificuldades e erros dos estudantes nas 5 questões que lhes foram apresentadas, todas elas envolvendo medianas.

Questão 1: Cálculo da mediana

Os pesos, em quilogramas, de 9 crianças são: 14, 23, 17, 19, 15, 26, 18, 19, 24.

- a) Determine o valor da mediana dos pesos das 9 crianças.
- b) Se acrescentarmos às 9 crianças uma outra criança de peso 25 kg, qual será o valor da mediana dos pesos das 1011 crianças?
- c) Se acrescentarmos às 9 crianças uma outra criança de peso 45 Kg, qual será a melhor medida para representar a distribuição dos pesos: a média, a moda ou a mediana? Porquê?

Na questão 1a) constatou-se que cerca de 13 alunos correspondente a 87% dos estudantes responderam correctamente a questão, e apenas dois, correspondente a 13%, responderam erradamente a questão por não terem ordenado os valores e terem considerado a mediana o valor central de todos elementos tal como lhe foi apresentado. (e.g., 14, 23, 17, 19, 15, 26, 18, 19, 24). Neste exemplo vemos que os alunos ao calcularem a mediana, tomam o valor central sem no entanto ordenar os dados, o que gerou erro. Na questão 1b verificou-se que cerca de 80% responderam correctamente e 20% erradamente O erro mais frequente foi de calcular a mediana sem antes ordenar os dados de forma crescente. A explicação que se dá para esse erro, é que o aluno entende que a ordem em que se refere na definição de mediana é a ordem dos dados, isto é, a ordem numérica dos pesos das crianças que estão descritos no exercício, no lugar de ordem numérica natural. Ainda nesta alínea, verificou-se que alguns alunos que conseguiram organizar os dados em ordem crescente, não calcularam a mediana porque não acharam o valor que ocupava a posição central quando os dados são pares, como ilustra a figura 1. Acredita-se que os alunos cometem esses erros porque não sabem interpretar a definição da mediana como valor

central, no caso de números pares, ou seja não assumem dois valores como elementos centrais e por conseguinte não aplicam o algoritmo para o caso de indeterminação.

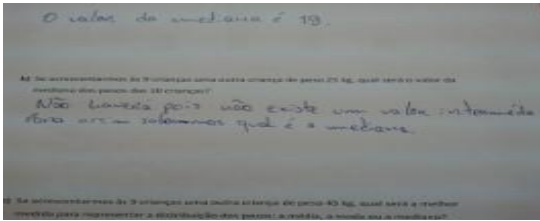


Figura.1: Resposta dos alunos do cálculo da mediana para dados pares

Em relação a questão 1c), pretendia-se avaliar se os estudantes são capazes de escolher bem o representante estatístico para uma distribuição em que aparece um valor atípico, e sua capacidade de argumentar a sua escolha com base nas propriedades das medidas de tendência central. Para responder esta pergunta, o aluno devia ter em conta as seguintes propriedades:

- 1) No cálculo da média intervêm todos valores dos dados, ao contrário que na mediana intervêm somente números de valores;
- 2) A média muda sempre que um dado muda ao contrário da mediana que pode não mudar;
- 3) A média é menos resistente aos valores atípicos que a mediana;

As respostas encontradas cerca de 60% dos alunos afirmaram que a média é a medida mais adequada, sem dar-se conta que o valor atípico afecta a média aumentando o seu valor. Igualmente Cobo [8], na sua investigação com estudantes de 1º de ESC (12-13 anos) e de 4º (15-16 anos), somente 17% e 11.8% dos estudantes respectivamente afirmaram a média como representativa em problemas da mesma natureza. No nosso estudo, verificou-se que apenas 13% dos alunos deram a resposta correcta, indicando que para este exemplo, nem a média nem a moda seria um bom representante. Estes alunos detectaram os valores atípicos nos dados e seu efeito sobre o cálculo da média, convertendo-se em representante não adequado para este problema. Estes alunos foram capazes de explicar com êxito as propriedades descritas da média e da mediana, e escolher o representante adequado do conjunto de dados.

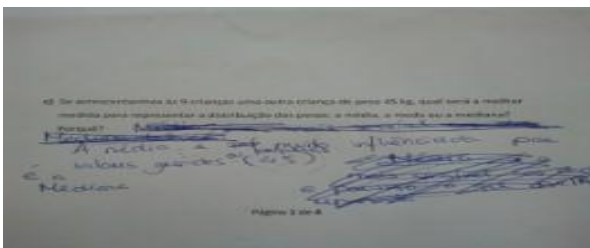


Figura 2: Exemplo de resposta do aluno da medida representativa dada

Pode-se observar que este exercício foi muito difícil para a maior parte dos alunos. Os mesmos resultados foram obtidos por Cobo [8]. Pensa-se que estas dificuldades se deve ao facto de nas classes de exercício de estatística particularmente das medidas de tendência central se incidir mais no cálculo do que em actividades interpretativas.

Questão 2: Possibilidade de determinação da mediana

A distribuição das bebidas preferidas pelos alunos de uma turma do 12º ano, de uma escola secundária, é definida pelo gráfico seguinte:

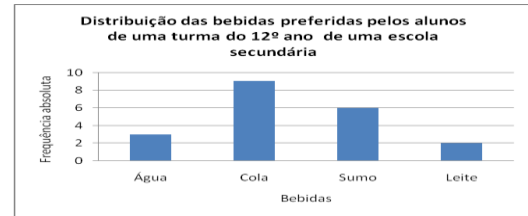


Figura 3 Dados qualitativos nominais

Determine, se for possível, o valor da mediana das bebidas preferidas pelos alunos da turma. O objectivo desta questão era saber se os alunos sabem da impossibilidade do cálculo da mediana para os dados qualitativos nominais. Nesta questão os alunos revelaram muitas dificuldades. Cerca de 7% afirmaram não ser possível determinar valores para a mediana e a grande maioria dos alunos cerca de 73%, responderam erradamente a questão e 20% não responderam. Em relação aos erros os alunos apresentaram um valor numérico recorrendo, de algum modo, às frequências absolutas, isto é, agruparam as frequências absolutas das bebidas e de seguida calcularam a mediana recorrendo o algoritmo da média dos elementos centrais, para o caso da indeterminação.

Resposta: a mediana é 7,5. Referir e.g., $\frac{(9+6)}{2} = 7.5$ que os mesmos resultados encontrados neste estudo foram também detectados por Fernandes [10].

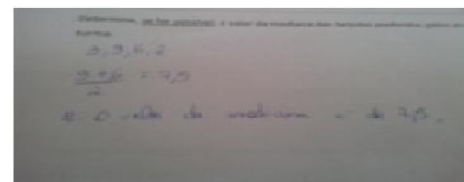


Figura 4. Exemplo de respostas de cálculo da mediana para dados qualitativos

Alguns alunos que responderam não ser possível calcular a mediana, apresentaram justificações não adequadas para a não existência da mediana e.g., $3+9+6+2=20$ alunos. Logo, não podemos calcular a mediana.

Questão 3: Determinação da mediana num gráfico

O gráfico seguinte representa a distribuição das alturas, em metros, de 52 alunos. Localize no gráfico dado a mediana da distribuição das alturas dos 52 alunos. Justifique a resposta.

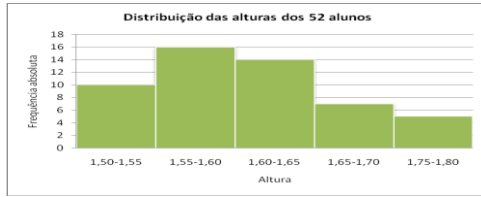


Figura 5: Localização da mediana

Nesta questão, cerca de 27%, não acertou a localização da mediana. Indicando a classe 1,60-1,65 como a que contém a mediana. Os restantes 73% simplesmente não responderam o que nos leva a depreender que tem eventualmente as mesmas dificuldades. Este erro resulta de os alunos não considerarem as frequências absolutas para determinação da mediana.

Questão 4: Determinar, dos dados conhecidos, a mediana e outras estatísticas de localização.

Indique as idades de cinco estudantes, em anos, quando: a) mediana é 16 anos b) A mediana é 16 anos e a moda é 15 anos c) mediana é de 16 anos, a média é de 17 anos e a moda é de 15 anos. Na questão 4a) maior parte dos alunos (60%) não tiveram dificuldades em determinar as idades dos cinco estudantes. Porém, 13% dos alunos responderam erradamente e 27% não responderam. O erro mais frequente consistiu na escolha das idades sem terem em conta a posição que estas idades ocupariam em relação a mediana. Ou seja tentaram estabelecer sequências de dados sem ter em consideração a estatística dada. O que deixa claro que os alunos têm a noção da definição de mediana Como sendo elemento que ocupa a posição central, mas confundem o centro estatístico com centro geométrico dos dados. Vejamos a seguir a figura que ilustra este erro.

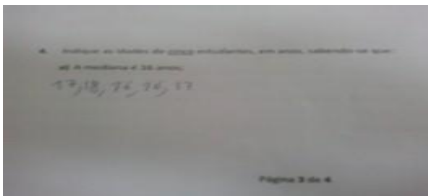


Figura 6: resposta das idades dos cinco alunos

Na questão 4b), cerca de 47% dos alunos responderam correctamente, 20% dos alunos responderam erradamente e 33% não responderam. Em termos das respostas erradas, resultaram do facto dos alunos não relacionarem os conceitos moda e mediana na distribuição, ora consideravam a mediana ora a moda. Os alunos tentaram definir as sequências tendo em conta, apenas, uma medida, ou mediana ou a moda. Veja-se a seguir na figura 7 que ilustra os erros:

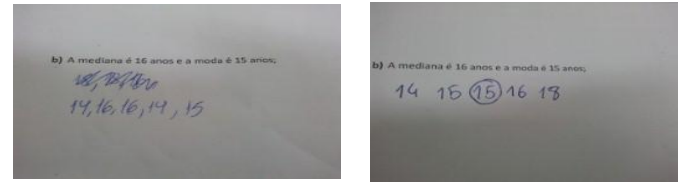


Figura 7: respostas das idades dos cinco estudantes sendo dado a mediana e moda

Tal como nas alíneas anteriores, na questão 4c alguns alunos tiveram dificuldade em determinar as idades, cerca de 47% responderam correctamente, 20% responderam erradamente e 33% não responderam a questão. O erro mais frequente foi de os alunos considerarem isoladamente os conceitos medianos, média e moda, apresentando sequências que verificavam por um lado a média, por outro lado, mediana e moda ou ainda verificava apenas na moda.

Questão 5: Propriedades da mediana.

Considera a mediana de um conjunto de 20 dados, todos diferentes. O valor da mediana diminui, aumenta ou mantém-se quando:

- Se acrescenta um dado inferior a todos os outros?
 Diminui; Aumenta; Mantém-se
- Se acrescenta um dado com o valor de mediana?
 Diminui; Aumenta; Mantém-se
- Se acrescenta um dado com valor superior ao da mediana?
 Diminui; Aumenta; Mantém-se
- Se acrescenta dois dados, um dado inferior a todos os outros e outro superior a todos os outros?
 Diminui; Aumenta; Mantém-se

Em relação às propriedades da mediana consideradas, observaram-se as seguintes percentagens de sucesso: 40% na alínea a) 87% na alínea b), 80% na alínea c) e 100% na alínea d) Referir que tal como nos resultados de Fernandes [10] os alunos apresentaram mais dificuldades no caso de se apresentar um valor superior a todos os outros.

4. CONCLUSÕES

O estudo revelou que o cálculo da mediana em um conjunto pequeno de dados é simples para os alunos, mas têm dificuldades em eleger a melhor representante de um conjunto de dados na presença de valores atípicos. A explicação que se dá, é que a escolha da medida de tendência central mais adequada num conjunto de dados, requer um raciocínio de quando aplicar o conceito, enquanto o cálculo da mediana precisa apenas do conhecimento do algoritmo, sem discutir a sua pertinência num caso particular. Assim, este estudo confirma os resultados obtidos em investigações prévias que sugerem que os alunos não percebem que a mediana pode ser melhor representante dum conjunto de dados que a média em alguns casos, (Groth & Bergner, 2006; Zawojewski & Heckman, 1997). Por conseguinte deduzimos em função dessas dificuldades, que o ensino deve ajudar a

desenvolver no aluno a compreensão de quando se deve utilizar a mediana e não apenas as competências de cálculo. Outros erros frequentes no cálculo da mediana, detectados neste estudo, é o facto de interpretarem a mediana como centro de um conjunto de dados sem as ordenar. Esta dificuldade foi também descrita por Barr [1] Carvalho [6] e Cobo [8]. Supõe-se que estes erros são devido ao aluno assumir que a “ordem” que se refere na definição é a ordem em que se estão listados os dados e não a ordem numérica convencional. Verificamos neste estudo que, na resolução de vários exercícios, foi patente a tendência dos alunos em manipular valores numéricos no sentido de obterem algum resultado também numérico, mesmo quando tal era totalmente desadequado. Uma situação bem ilustrativa desse facto verificou-se na questão 2, onde se questionava os alunos sobre a possibilidade de determinar a mediana num atributo qualitativo nominal. Assim pode concluir-se que para além da competência de cálculo, os alunos deverão desenvolver uma compreensão conceptual dos conceitos estatísticos. Como afirmam Carvalho e César [5] na página 223, o aluno necessita de ultrapassar o nível computacional e ser capaz de mobilizar conhecimentos para utilizar em situações da vida real e isto de facto é o mais importante. Ao terminar todos estes erros e dificuldades dos alunos no conceito de mediana, enfatizam a necessidade de se ter em conta as dificuldades dos conceitos de mediana para os alunos e reforçar o seu ensino. Também sugerem que se deve continuar a investigar, propondo outras tarefas relacionadas com a mediana ou melhor, desenhando um ensino que permite melhor compreensão por parte dos alunos.

5. REFERENCIAS

- [1]. Barr (1980). Some students' ideas on the median and the mode. *Teaching Statistics*.
- [2]. Batanero, C (2000). Dificuldades de los estudiantes in los conceptos estadísticos elementares: el caso de las medidas de posición central. In Loureiro, C., Oliveira, F. & Brunheira, L. (orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Estatística*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de estatística, Associação de Professores de Matemática e Departamento de Educação e estatística e investigação operacional da Faculdade de ciências da universidade de Lisboa.
- [3]. Batanero (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*.
- [4]. Carvalho, C. (2004). Um olhar da psicologia pelas dificuldades dos alunos em conceitos estatísticos. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística*. Actas do 1.º Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola (pp. 85-102). Braga: Centro de Investigação em Educação.
- [5]. Carvalho, C. & Cesar, M. (2001). Interagir para aprender: um caso de trabalho colaborativo em estatística. In Silva, B & Almeida, L. (orgs.), *actas do VI congresso Galaico-Portugues de Psicopedagogia Vol. 2*. Braga: Centro de Estudos e Educação e Psicologia da Universidade do Minho.
- [6]. Carvalho, C. (1998). Tarefas estatísticas e estratégias de respostas. Trabalho apresentado no VI Encontro em Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação. Viana de Castelo, Portugal.
- [7]. Carvalho, C. (1996). Algumas questões em torno de tarefas estatísticas com alunos de 7.º ano. In A. Roque & M. J. Lagarto (Orgs.), *Actas do ProfMat 96* (pp. 165-171). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- [8]. Cobo, B (2003). Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria. Tesis Doctoral, Universidade de Granada.
- [9]. Cobo, B., & Batanero, C. (2000). A mediana na educação Secundaria obrigatória: Um conceito simples? UNO.
- [10]. Fernandes, J.A (2004). O ensino de estatística, no ensino básico e secundário um estudo exploratório. In Fernandes J.A., Sousa, M.V. & Ribeiro S.A., (orgs), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística*. Braga: Centro de Investigação em educação. p. 167.
- [11]. Groth, R. E., & Bergner, J.A (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical thinking and learning*.
- [12]. McGrotha, M., Cobb, P., & Mc Clein, K, (1998). An analysis of students' statistical understanding. Trabalho apresentado na reunião anual da Associação Americana de pesquisadores em Educação, São Diego, CA.
- [13]. Zawojewski, J.S., & Heckman, D.J, (1997). What do students know about data analysis, statistical, and probability? In Kenny, R. & Silver, E. A. (eds), *Results from the sixth mathematics assessment of the national assessment of education progress*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.